OF

Outils Fondamentaux
Bienvenue dans la matrice

Par William Cloudless

Table des matières

Définitions – Exemples 3
- Les matrices 3
- Transposé d'une matrice 3
  - Principe 3
  - Vocabulaire et définition 3

Opérations 4
- Multiplier une matrice par un nombre 4
- Somme d'une matrice avec une autre matrice 4
- Produit de deux matrices 5
- Puissance d'une matrice 5
  - Propriété 6

Inverse d'une matrice 6
- Définition 6
  - Exemple 6
- Propriété 7
  - Exemple 7
  - Proposition 7

Matrices non réversibles 7
- Méthode avec les inconnus 7
  - Exemple 7
- Méthode avec le pivot de Gauss 8
  - Exemple 8
- Méthode – Lien des types 8
  - Exemple 8

Simplification avec la réversibilité 9
- Exemple 9

Résolution d'un système avec A^{-1} 9
- Exemple 9

Définitions – Exemples

Les matrices

- Une matrice à deux dimensions, elles sont noté « m » pour les lignes et « n » pour les colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \in M_{m\,n}$$

- Si « m » (les lignes de la matrice) est égale à 1 alors, on a :

$$M = (a_{11}, a_{1\,2}, a_{1\,2}, \dots)$$

- Si « n » (les colonnes de la matrice) est égale à 1 alors, on a :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1\,1} \\ a_{2\,1} \\ a_{3\,1} \\ \dots \end{pmatrix}$$

- Si « m » = « n » alors, la matrice est carré d'ordre 2

Transposé d'une matrice

Principe

Une transposé est le résultat de la transformation des colonnes en ligne et vice-versa d'une matrice.

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La transposé de M, noté M^t, est :

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Vocabulaire et définition

- Si $M = M^t$, alors M est une matrice symétrique
- Si M est une matrice, on peut donner, dans certain cas, des noms à la situation de la matrice :
  - M est triangulaire supérieur si la partie inférieure de la matrice est nul. Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ 0 & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ 0 & 0 & a_{3\,3} \end{pmatrix}$$

- M est triangulaire inférieur si la partie supérieure de la matrice est nul. Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & 0 & 0 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & 0 \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{pmatrix}$$

- M est diagonal quand la partie supérieur et inférieur est nul. Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2\,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3\,3} \end{pmatrix}$$

  - Si en plus d'être diagonale, les valeurs de sa diagonal sont égal ($a_{1\,1} = a_{2\,2} = a_{3\,3}$) alors on dit que c'est une matrice scalaire. Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  - Si en plus d'être une matrice scalaire, toutes les valeurs de la diagonal est égal à 1 alors on dit que c'est une matrice identité. Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations

Multiplier une matrice par un nombre

Dans ce cas, on prend toutes les valeurs de la matrice et la multiplie avec le nombre une par une. Exemple :

On souhaite multiplier M par 3, on a :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} * 3$$

Alors on fait :

$$M = \begin{pmatrix} -2 * 3 & 3 * 3 \\ 4 * 3 & 5 * 3 \end{pmatrix}$$
$$M = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Somme d'une matrice avec une autre matrice

Dans ce cas, les deux matrices doivent OBLIGATOIREMENT avoir la même dimension. Il suffit ensuite d'additionner la première valeur de la première matrice avec la première de la deuxième matrice et ainsi de suite. Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

La multiplication d'une matrice A avec une matrice B est possible si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B.

Exemple :

=

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le nombre de colonne est égal au nombre de ligne, alors on peut faire le produit.

Pour ce faire, on prend la première colonne de la matrice A et on multiplie l'ensemble par la ligne de la matrice B. Exemple :

*+

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} (2*3-1*4) & (2*5-1*6) & (2*2-1*-1) \\ (1*3+3*4) & (1*5+3*6) & (1*2+3*-1) \\ (4*3+2*4) & (4*5+2*6) & (4*2+2*-1) \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 15 & 23 & -1 \\ 20 & 32 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque : A*B ≠ B*A

Puissance d'une matrice

La puissance consiste à multiplier n fois une matrice par elle-même. Pour se faire la matrice doit être OBLIGATOIREMENT carré.

Exemple :

$$A^2 = A * A$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4*4+5*2 & 4*5+5*1 \\ 2*4+1*2 & 2*5+1*1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 25 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$A^2 = A * A$$

$$A^3 = A^2 * A$$

$$A^k = A^{k-1} * A$$

Propriété

On considère I comme l'élément neutre de la multiplication, d'où ces propriétés :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$A * I = I * A = A$$

Combinaison linéaire de vecteur

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 4b - 2c \\ 2a + 5b + c \\ 3a + 2b + 6c \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 4b - 2c \\ 2a + 5b + c \\ 3a + 2b + 6c \end{pmatrix}$$

Règles de calcul

- En général : AB ≠ BA
- A + I = A
- A + B = B + A
- (A + B) + C = A + (B + C)
- k(A + B) = kA+kB
- (α + β)A = αA + βA

Inverse d'une matrice

Définition

On considère I comme une matrice d'identité. Elle est aussi l'élément neutre de la multiplication de matrice.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A * I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$I * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété

Si A est carré et que si et seulement si :
$\exists A^{-1}\ tel\ que\ A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$

$Si\ \exists B\ tel\ que\ A * B = B * A = I$
$Alors\ A^{-1} = B\ et\ B^{-1} = A$

On dit que A^{-1} est l'inverse de A car en multipliant A et A^{-1} celui-ci donne I.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A * B)^{-1} = A^{-1} * B^{-1}$

Matrices non réversibles

On considère que la matrice o est nul.

$La\ matrice\ o\ n'est\ pas\ inversible$
$car\ \nexists B\ tel\ que\ p * B = I$
$car\ o * B = o$

Méthode avec les inconnus

Pour savoir si une matrice est réversibles, on cherche l'inverse en remplaçant B par des inconnues.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, on\ a\ A * B = I. On\ cherche\ donc\ B$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \end{cases} Impossible$$
$$B\ n'existe\ pas\ donc\ A\ n'est\ pas\ inversible$$

Méthode avec le pivot de Gauss

On peut aussi savoir s'il est inversible ainsi que son inverse avec le pivot de Gauss.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ -L_2 \\ -L_3 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où le résultat retourne une ligne de 0 alors la matrice n'est pas inversible.

Méthode – Lien des types

S'il y a un lien entre les lignes où un lien entre les colonnes alors la matrice n'est pas inversible.

Si on considère que dans une matrice A :

$L_1 = L_2$
$L_1 + L_2 = L_3$
$2L_1 - L_3 = L_2$

Alors la matrice A n'est pas inversible.

Exemple

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 10 & 30 & 50 \\ 11 & 32 & 53 \end{pmatrix}$$

$On\ observe\ que\ L_1 + L_2 = L_3\ car:$

$(1 \quad 2 \quad 5) + (10 \quad 30 \quad 50) = (11 \quad 32 \quad 53)$

$Donc\ A^{-1}\ n'existe\ pas$

Simplification avec la réversibilité

Dans le cas où $AB = AC$, si A^{-1} existe alors on peut simplifier par A

- $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$
- $(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$
- $IB = IC => B = C$

Exemple

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; PQ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; PR = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$PQ = PR \text{ or } Q \neq R \text{ donc } P^{-1} \text{ n'existe pas}$$

Résolution d'un système avec A^{-1}

Dans le cas où vous vous retrouver dans la résolution de l'équation suivant :

$$A * X = B$$
$$\text{où } A \text{ est la matrice du système,}$$
$$X \text{ un vecteur et}$$
$$B \text{ le second membre}$$

Vous pouvez résoudre l'équation si et seulement si A est inversible

Exemple

Nous avons les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x - z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

On peut transposer ces trois équations avec la formule vu précédemment :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Si A est inversible alors on peut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}&Ax = B\\&A^{-1}(Ax) = A^{-1}B\\&(A^{-1}A)x = A^{-1}B\\&Ix = A^{-1}B\\&x = A^{-1}B\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Donc on peut maintenant résoudre l'équation :

$$X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}B$$

$$X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x = 0\\ y = -1\\ z = -2\end{cases}$$